

Diseño y refinamiento de una actividad provocadora de modelos enfocada a resolver un problema del ámbito de la construcción

MARTHA ELENA AGUIAR-BARRERA,¹ HUMBERTO GUTIÉRREZ-PULIDO,²
VERÓNICA VARGAS-ALEJO³



Resumen

En este reporte se presentan los resultados del proceso de diseño y refinamiento de una actividad enfocada a resolver un problema en el ámbito de la construcción. El proceso se fundamentó en la perspectiva de modelos y modelación. Se trabajó con estudiantes de la carrera de Ingeniería Civil de la Universidad de Guadalajara. En el diseño de la actividad se buscó hacer una actividad cercana a la realidad de los estudiantes, y a bloquear soluciones intuitivas basadas en el pensamiento lineal, de tal forma que las soluciones basadas en porcentajes y proporcionalidad no fueran viables; y de esta forma se animó a los estudiantes a usar un modelo probabilístico para el análisis de los datos del problema planteado. Se reportan las modificaciones que sufrió la Actividad Provocadora de Modelos (APM) en función de los seis principios de diseño de las APM y los principales obstáculos que se enfrentaron para su diseño.

Palabras clave: Modelo lineal, Probabilidad, Aleatoriedad, Distribuciones de probabilidad, Modelos, Modelación.

Design and Refinement of a Model of Provocative Activity Focused on Solving a Construction Problem

Abstract

This report presents the results of the design and refinement process of an activity focused on solving a problem in the field of construction. The process was based on the perspective of models and modeling. We worked with students of the Civil Engineering career of the Universidad de Guadalajara. In the design of the activity, we sought to make an activity close to the reality of the students, and to block intuitive solutions based on linear thinking, in such a way that solutions based on percentages and proportionality were not viable; and in this way the students were encouraged to use a probabilistic model for the analysis of the data of the problem posed. The modifications suffered by the Model Provocative Activity (MPA) are reported based on the six design principles of the MPA and the main obstacles faced for its design.

Key Words: Linear model, Probability, Randomness, Probability Distributions, Models, Modeling.

Recibido: 23 de octubre de 2022
Aceptado: 25 de noviembre de 2022
Declarado sin conflicto de interés

- 1 Departamento de Matemáticas. Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías. Universidad de Guadalajara, México. martha.aguiar@academicos.udg.mx
- 2 Departamento de Matemáticas. Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías. Universidad de Guadalajara, México. humberto.gpulido@academicos.udg.mx
- 3 Departamento de Matemáticas. Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías. Universidad de Guadalajara, México. veronica.vargas@academicos.udg.mx

Introducción

La evaluación crítica de afirmaciones basadas en datos es una habilidad importante de los ciudadanos en la actualidad. El análisis de datos permite dar credibilidad a argumentos científicos, así como afirmaciones políticas, sociales y económicas (Contreras y Molina-Portillo, 2019). De ahí la importancia de propiciar la formación de una sólida cultura estadística del estudiantado, es decir, de la capacidad para reflexionar y pensar estadísticamente, que va más allá de realizar cálculos y desarrollar procedimientos específicos (Ben-Zvi & Garfield, 2004).

Lograr esta cultura estadística requiere mejorar las formas de enseñar en el aula. Un giro importante en la manera de enseñar estadística es analizar los datos de problemas reales, donde se priorice la toma de decisiones y la evaluación crítica de afirmaciones realizadas con datos con el apoyo de software estadístico.

La Perspectiva de Modelos y Modelación (PMM) proporciona una base teórica y metodológica que posibilita la incorporación de estos elementos, misma que puede generar una cultura estadística en el estudiantado a través de las Actividades Provocadoras de Modelos (APM). Las APM son actividades de resolución de problemas (reales o que pueden considerarse reales) que propician la formación de modelos y que a menudo conducen a formas significativas de aprendizaje (Amit & Jan, 2010; Lesh, 2010).

Como lo señalan Årlebäck y Doerr (2020) al desarrollar modelos no solo se describen sino también se explican situaciones matemáticas relacionadas con el mundo real. Esto facilita el impulso de una cultura estadística en el estudiantado. Por ello, un número creciente de investigadores y profesores, hombres y mujeres, emplean la PMM como una alternativa para la enseñanza de la probabilidad y la estadística (Amit & Jan, 2010; Årlebäck & Doerr 2020; Aymerich & Albarraçín, 2022; Garfield, delMas & Zieffler, 2012; Lesh, 2010; Noll, Clement, Dolor, Kirin & Petersen, 2018; Pfannkuch *et al.*, 2018). De ahí la conveniencia de desarrollar actividades que aborden problemas cercanos al alumnado en campos específicos de las diferentes disciplinas donde se utilicen métodos de la probabilidad y la estadística como una alternativa educativa importante.

En este artículo se presenta el proceso de diseño y refinamiento de una actividad enfocada a resolver un problema que puede considerarse cercano a la ingeniería civil, donde para analizar los datos se bus-

ca forzar al estudiante a utilizar una distribución de probabilidad; esto al presentar los datos de tal forma que se bloquearon soluciones intuitivas basadas en el pensamiento lineal (proporcionalidad y porcentajes). La primera versión de la APM, se basa el desperdicio en los prefabricados de concreto utilizados en la construcción, donde el estudiante debe decidir cómo evaluar en forma segura cuáles de seis empresas logran reducir desperdicio de estos prefabricados respecto al estándar de la industria; dando como dato diferentes tamaños de obras. En la segunda versión de la actividad, aunque se mantuvo la esencia estadística, se cambió el problema para hacerlo más claro para el estudiantado al basarlo en la merma en la producción de ladrillo artesanal; y se plantea un concurso inventado con el propósito de que las empresas ladrilleras busquen disminuir sus mermas. Al igual que la primera versión, se presentan diferentes tamaños y resultados muestrales que se proponen obligar al estudiante a recurrir a un modelo probabilístico adaptado para resolver la problemática. En el planteamiento del problema se busca no recurrir a lenguaje escolar, ni inducir al estudiante hacia una solución preestablecida, esto para tratar de que el estudiantado pueda profundizar en la comprensión del problema y recurrir a sus experiencias y conocimientos de la vida real.

La pregunta que guía este estudio es: ¿cuáles son los obstáculos a los que se enfrentan los diseñadores de actividades basadas en problemas reales o que pueden ser considerados reales para apoyar el desarrollo de la comprensión del estudiantado de los conceptos relacionados las distribuciones de probabilidad? Para ello, se diseñó y se implementó una APM desde la PMM (Lesh, 2010), relacionada con el campo de estudio de la ingeniería civil, cercana a la realidad del estudiantado, con el apoyo de la tecnología adecuada para facilitar su resolución. Este informe de investigación contribuye al estudio sobre el diseño de actividades que involucran problemas reales o que puedan considerarse reales de fenómenos aleatorios.

Perspectiva de Modelos y Modelación

Como señalan Sevinc y Lesh (2018) la PMM se interesa por “investigar la naturaleza y el crecimiento de los sistemas conceptuales de los solucionadores de problemas en una amplia variedad de edades, disciplinas y entornos” (p. 302). Si bien la mayoría de las investigaciones se centran en el estudio de los modelos que crea el estudiantado, en este reporte se abor-

da desde la visión diseñador-investigador, en el sentido de identificar las problemáticas al aplicar los principios metodológicos de la PMM en nivel universitario. Lesh (2010) indica que la creación de modelos en forma de espiral no solo ocurre en el estudiantado, también las personas diseñadoras-investigadoras sufren un proceso de cambio que los conduce a nuevas formas de pensar, lo que trae nuevos desafíos para los que se requiere de cambios.

Por tanto, los investigadores tienden a ser partes inseparables de los sistemas que buscan comprender y explicar. No sólo es cierto que los investigadores y desarrolladores tienden a ser partes integrales de los sistemas que están tratando de entender, sino que, para evaluar el desarrollo de sistemas de interpretación poderosos, el tipo de tareas que son más útiles son aquellas en las que los 'sujetos' se necesitan para interpretar las cosas de manera que los aspectos importantes de sus interpretaciones puedan ser observados directamente. Sin embargo, tales actividades de prevención tienden a dar lugar a adaptaciones conceptuales que mejoran la comprensión de los sistemas de interpretación que se están evaluando. Por lo tanto, documentar y evaluar estos entendimientos tiende a cambiarlos de maneras significativas (Lesh 2010, pp. 21 y 22).

De ahí la importancia de documentar cómo se produce el proceso de refinamiento de una APM, en donde los modelos generados por el estudiantado, modifican el entendimiento del profesorado sobre el conocimiento de estos, y a su vez el investigador modifica la APM en función de estos cambios, que a su vez provocan nuevas modificaciones que tienen que ser evaluadas y revisadas.

Una característica primordial de las APM es que simulan fenómenos o problemas de la vida real en donde se busca que el estudiantado relacione sus conocimientos y experiencias personales con el problema y le provoque la necesidad de desarrollar modelos (matemáticos-estadísticos) para interpretar o dar posibles alternativas de solución (Lesh *et al.*, 2000).

De ahí que las APM son una opción que contribuye a formar una cultura estadística en el estudiantado al propiciar la búsqueda de soluciones de este tipo a problemas reales o que puedan ser considerados como reales. Como lo indica Ben-Svi "uno de los principales objetivos de la educación estadística es educar a los alumnos críticos, independientes y alfabetizados estadísticamente que pueden estudiar temas de su propio interés y participar en las deci-

siones basadas en datos" (2018, p. 475). Este objetivo se encuentra muy alineado con los propósitos de las APM.

Otro de los aspectos en los que existe plena correlación entre la PMM y la cultura estadística es el uso de la tecnología, la cual se utiliza como una herramienta que apoya el proceso de construcción de modelos conceptuales, como una forma de realizar exploraciones matemáticas, descubrir conexiones entre conceptos y experimentar las matemáticas como un conjunto de ideas interconectadas que tienen sentido (Abramovich, 2013, p. 510).

En el diseño de la APM que se reporta relacionado con las distribuciones de probabilidad, estudios previos como los de Dooren *et al.* (2003) y Konold (1975) señalan que muchos estudiantes tienen conflictos al intentar resolver problemas relacionados con la probabilidad con un modelo proporcional, en donde resulta difícil modificar este pensamiento lineal aun después de una intervención.

Este problema sobre la transición del pensamiento lineal o proporcional al probabilístico fue una preocupación desde el inicio del diseño de la APM. Este problema se enfrentó con el manejo de los datos del tamaño de muestra y la problemática a resolver, sobre todo por la facilidad de transformar la probabilidad a porcentaje, lo que luego en ocasiones conduce a interpretar linealmente los resultados.

El diseño de la APM se basó en los seis principios propuesto por Lesh y colaboradores: realidad, construcción de modelo, autoevaluación, documentación de la construcción, compartición y reutilización de construcción, y prototipo efectivo (Lesh *et al.*, 2000).

Método

Tipo de diseño

El estudio fue de tipo cualitativo en donde se analizaron las versiones de las APM por medio documentos generados en electrónico (blogspot, Word y PowerPoint), videos y chat.

Participantes

El tipo de muestra fue por conveniencia en donde una de las investigadoras era la profesora del grupo de estudio. La implementación se hizo en los ciclos semestrales 2019A (8 estudiantes) y 2021A (17 estudiantes); dentro de la asignatura de Probabilidad y Estadística que se imparte en la carrera de Ingeniería Civil en la Universidad de Guadalajara, México.

Instrumentos

Diseño de dos APM: a) Fomento del ahorro de materiales en la construcción de viviendas Prefabricados y Ladrilleras (APM Prefabricados); b) Concurso para reducir la merma en la producción de ladrillo artesanal en Jalisco (APM Ladrilleras).

La versión de la APM Prefabricados partió de un problema hipotético sobre la merma (desperdicio) de prefabricados de concreto en la construcción de viviendas. Fue ambientado en un programa denominado Buenas prácticas y cuidado del medio ambiente, en donde una de sus actividades fue premiar a empresas pequeñas y medianas constructoras de viviendas con reducciones en el desperdicio de los materiales de construcción, en específico de prefabricados de concreto. Al estudiantado se le puso como parte del jurado calificador donde tenían que evaluar con criterios estadísticos confiables la reducción significativa del desperdicio en cualquier tamaño de obra.

Se buscó que el estudiantado recurriera a un modelo probabilístico para resolver la problemática, no se les dieron pistas sobre cómo resolverlo, ni qué distribución o herramienta utilizar. El tamaño de obras se relacionó con el tamaño de muestra, y éste se ajustó de tal forma que utilizar el porcentaje o la regla de tres no fuera un camino de solución.

La versión de la APM Ladrilleras buscó hacerla más realista y que representara un reto más claro para el estudiantado, para lo cual se partió de un problema real, que se refiere a la merma en la producción de ladrillo artesanal en Jalisco (Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climático, 2016). Sobre esta realidad giró un concurso inventado para disminuir dicha merma. Al igual que la primera versión, se buscó que el estudiantado recurriera a un modelo probabilístico que se adaptara para resolver la problemática. Además, para darle más sentido de realidad se les presentó la actividad en formato de periódico electrónico en un blogspot (<https://mermaladrillosartesanales.blogspot.com/>).

En el apartado de Análisis de resultados se presentan más detalles de las dos versiones de las actividades.

Procedimiento

Se analizó el refinamiento del diseño de una APM por parte de investigadores, sobre la distribución de probabilidad. El diseño de la APM se realizó bajo los principios propuestos por Lesh y colaboradores (realidad, construcción, autoevaluación, documentación, compartibles y reutilizables y prototipos).

El refinamiento de la APM, enfocada hacia el aprendizaje de las distribuciones de probabilidad, en particular la binomial, se llevó a cabo en dos etapas en dos ciclos semestrales. En la primera etapa se trabajó con la APM Prefabricados. En la segunda etapa, se generó una versión mejorada, APM Ladrilleras; en donde, aunque se incluyó un cambio del producto, se mantuvo la esencia y objetivo de la actividad.

Resultados

El análisis del refinamiento se llevó a cabo de acuerdo con los principios de diseño de la APM resumidos antes, para lo cual se compararon las dos versiones (Prefabricados y Ladrilleras). Enseguida se detallan los cambios más importantes realizados a la APM.

El principio de realidad

Este principio indica que se debe lograr que el estudiantado considere que la problemática planteada es real o puede ser real. Por ello, se consideró fundamental tomar en cuenta el contexto de ingeniería civil para construir una APM relacionada con la futura práctica profesional de los estudiantes de esta carrera: mermas de materiales en el proceso de construcción de viviendas, en la primera versión de la actividad; y producción de ladrillo artesanal en la segunda. Además, ambas versiones de la APM se enmarcaron en situaciones familiares a los estudiantes como son los concursos; y la segunda se presentó en un blog denominado *El Ambientalista Periódico digital* (<https://mermaladrillosartesanales.blogspot.com/>) para hacerla más creíble.

Al analizar la primera versión de la APM Prefabricados, en forma posterior a su primera aplicación, se identificó que se utilizaron ciertas frases típicas de libro de texto, donde se induce al estudiantado a analizar y resolver la actividad con conceptos y métodos específicos de la probabilidad y la estadística, lo cual es limitante para que pueda conectar el problema o su solución con sus experiencias de la vida real. De acuerdo con Lesh este tipo de lenguaje del ámbito escolar desactiva los conocimientos reales del estudiantado:

Muchos estudiantes aprenden rápidamente a desactivar sus conocimientos y experiencias de la vida real. Obtener las respuestas 'correctas' a los problemas escolares a menudo significa centrar más la atención en la interpretación y el cumplimiento de las normas no matemáticas impuestas

por los maestros, los libros de texto o las pruebas, y menos en la interpretación de construcciones matemáticas significativas, poderosas, interesantes y útiles (Lesh *et al.*, 2000, p. 620).

Introducir ciertos conceptos estadísticos en la narrativa de la primera versión de la actividad, que en la vida cotidiana no son utilizados por el estudiantado, quita veracidad a la historia, e induce a resolver la actividad recurriendo al conocimiento escolar, sin conectar con su experiencia.

En específico, en la primera versión de la APM Prefabricados se destaca el uso de los siguientes conceptos del ámbito escolar: reducción significativa, fundamentación estadística, criterios estadísticos, generalizable, variación y muestra. De acuerdo con Lesh *et al.* (2000), el uso de este tipo de conceptos en la narrativa de la APM tiende a conectar al estudiantado con su pensamiento escolar, y los desconecta del pensamiento cotidiano; sin que lleguen a unir ambos pensamientos. Al estar vinculada la narración con el lenguaje estadístico el principio de realidad no se cumple. Es claro que las quejas de los concursantes o la edición de una convocatoria dirigida a constructores de viviendas, no utilizarían palabras como reducción significativa, variaciones respecto al promedio o criterios estadísticos.

En la transición a la segunda versión de la APM Ladrilleras se buscó disminuir el uso del lenguaje estadístico para lograr una versión más coloquial donde solo quedó muestra y variación. Estos conceptos estadísticos son poderosos, pero también son de uso coloquial, por lo que a pesar de las posibles confusiones se consideró que deberían incluirse. Un aspecto que se debe resaltar fue la dificultad del grupo investigador para ponerse en el lugar del estudiantado en cuanto al lenguaje que ellos utilizan. Se observó que el profesorado tiene tan interiorizados estos conceptos que se olvida que el estudiantado apenas está dándoles sentido.

Además, en la segunda versión de la actividad se tiene un problema que puede ser más familiar al estudiantado de ingeniería civil, al ser el ladrillo una materia prima para la construcción proporcionado por proveedores externos, con problemas de calidad más ubicables o creíbles por los alumnos. Para empezar porque normalmente es un trabajo artesanal, de pequeños productores. En cambio, en la primera versión se ubicó el problema de desperdicio de prefabricados de concreto durante el proceso de construcción en sí, en donde además de que puede ser más difícil

estimar el desperdicio, puede haber mucha variación entre pequeños y grandes constructores en cuanto a sus métodos de construcción.

Principio de construcción

Este segundo principio sugiere que la presentación de los datos debe provocar la necesidad de buscar una solución. Estos pueden presentarse de forma abundante o escasa. Lo que se observó en las dos implementaciones de la primera versión de la APM, es que proporcionar información abundante genera confusión, por lo que en la segunda versión se buscó reducir y solo entregar la información mínima necesaria. Esto se puede constatar al comparar los párrafos de ambas versiones de la APM. En la de Prefabricados, además de presentar los datos en forma de libro de texto, el estudiantado tiene que hacer la conversión a metros cuadrados en donde se les proporciona la siguiente información:

Se tiene una estimación histórica de desperdicio de 8.7 por ciento en promedio; considerando un tamaño de un metro cuadrado por prefabricado. Se sabe que es normal que haya ciertas variaciones en el desperdicio entre una obra y otra, y que no cualquier valor menor al promedio significa realmente una reducción. Con esta información se deben establecer los niveles usuales de variación del desperdicio acorde al tamaño de la obra y así fijar a partir de dónde se considera que realmente hubo un ahorro en cualquier obra de este tipo de empresas (pequeñas y medianas).

En cambio, la segunda versión de la APM Ladrilleras la información fue más precisa: Es necesario lograr una merma de ladrillos que sea menor al promedio para el Estado de Jalisco, que en 2016 fue del 7% (<https://mermaladrillosartesanales.blogspot.com/>).

Sin embargo, la mayor sencillez que se logró en la APM Ladrilleras, disminuyó un poco al complementar la información: En el Cuadro ubicable en la liga proporcionada se encuentran los datos y resultados del muestreo considerado para decidir sobre las ladrilleras ganadoras, así como las que fueron descalificadas por no lograr una merma de ladrillos por debajo del promedio estatal (7%) (<https://mermaladrillosartesanales.blogspot.com/>).

En esta versión además se agregó un párrafo en donde se explicó cómo se obtuvo la muestra que, aunque se utilizaron datos técnicos, se observó que ayudó a que tamaños de muestra diferentes no fuera un problema:

Para la evidencia del nivel de merma, los organizadores tomaron una muestra de la producción de ladrillos de uno de los hornos de cada concursante, de acuerdo con el tamaño del mismo; la selección se realizó de forma aleatoria y con apoyo de las tablas MIL STD 105E (que recomiendan el tamaño de la muestra de acuerdo con el tamaño de la población). Evaluaron la calidad de los ladrillos muestreados y determinaron cuáles podrían considerarse merma por tener defectos críticos (<https://mermaladrillosartesanales.blogspot.com/>).

En cuanto al objetivo de la actividad, que debe ser claro y provocar la necesidad de crear modelos probabilísticos, en la primera versión de la APM Prefabricados resultó confuso lo solicitado para el reporte final.

Además de las preguntas para resolver la actividad (¿Cómo evaluar en forma segura si una obra tiene una reducción significativa en el desperdicio respecto al estándar de la industria? y ¿Cómo elegir al ganador independientemente del tamaño de la obra?), tuvieron que responder lo siguiente: 1. Si una construcción tiene un desperdicio de prefabricados de concreto similar al promedio de la industria, ¿qué variación se puede esperar en el desperdicio de los prefabricados de concreto en dicha obra? 2. ¿A partir de qué valor se considera en forma segura una reducción en el desperdicio? 3. ¿De qué forma se pueden expresar claramente los criterios de variación y cálculo del ahorro del prefabricado de concreto? 4. ¿Cómo estimar el ahorro atribuible a la reducción del desperdicio? Estas últimas preguntas les generaron más dudas sobre el producto a entregar. También se observó el uso de un lenguaje estadístico y no uno de la vida real.

En cambio, en la versión APM ladrilleras lo solicitado fue concreto y con un lenguaje más coloquial:

¡Apoyemos para que el concurso continúe! Mándanos una propuesta en la que describas por qué los organizadores tomaron las decisiones adecuadas tanto para las ladrilleras:

(a) Descalificadas por no garantizar que lograron un nivel de mermas menor al 7%.

(b) La asignación de los tres primeros lugares (<https://mermaladrillosartesanales.blogspot.com/>)

Por otro lado, en cuanto a la especificación de las alternativas a comparar para decidir el ganador en las dos versiones de la actividad, se buscó generar opciones en donde la solución no fuera obvia y no bastará el cálculo de un porcentaje o un análisis de proporcionalidad que pudiera resolverse con regla de tres. Esto

se hizo generando opciones para contener esas salidas, para lo cual se utilizaron diferentes tamaños de muestras y resultados en la muestra, para orillar a los estudiantes a pensar en un modelo probabilístico para resolverla, la forma más directa, la binomial, pero también podría ser la de Poisson o la aproximación de la normal. Ellos debían sentir la necesidad de construir ese modelo al descubrir que sus primeros intentos (porcentaje y proporcionalidad) no les generaban los resultados planteados en la actividad. Esto quedará más claro enseguida.

Principio de autoevaluación

La aplicación del principio de autoevaluación en el diseño de una actividad debe estar orientado a ayudar al estudiantado a evaluar por sí mismos las soluciones propuestas. En este sentido, en el caso de las dos versiones de la APM, la aplicación de este principio se orientó a que el estudiantado se diera cuenta que las soluciones intuitivas basadas en razonamientos de proporcionalidad no eran correctas. Esto debido a que la formación previa que se tiene sobre linealidad o proporcionalidad dificulta que incorporen el uso de modelos probabilísticos (Dooren *et al.*, 2003 y Konold, 1995). Por lo que, en ambas versiones de la actividad se cuidó que la regla de tres o el porcentaje no fuera un camino de solución, de tal forma que, al contrastar sus resultados con la información proporcionada, pudieran ver que ese camino no era una respuesta correcta, esto al no coincidir los resultados de sus análisis de proporcionalidad con las seis evaluaciones de las empresas y las ladrilleras de ambas versiones de la actividad (ver las columnas % de ahorro y Evaluación del Cuadro 1, en relación a los descalificados y los primeros lugares). También se tuvo especial cuidado en indicar que los evaluadores habían realizado bien los cálculos, para que pudieran contrastar sus recomendaciones sin necesidad de preguntar a la profesora si estaban en el camino correcto (principio de autoevaluación).

Cabe mencionar que en la primera versión de la APM Prefabricados, todos los estudiantes eligieron resolver la actividad en un primer intento con el porcentaje, al ver que no era un camino de solución algunos llegaron a plantear que el problema estaba equivocado.

En efecto, en la APM Prefabricados (parte izquierda del Cuadro 1) se puede observar que la magnitud del porcentaje muestral no corresponde al lugar ocupado en el concurso (empresa 4 y 5) o que, a pesar de que las empresas 2 y 3 logran valores muestrales

Cuadro 1. Tamaños y resultados muestrales para las dos versiones de la actividad

Empresa	APM Prefabricados		Ladrillera	APM Ladrilleras		Evaluación
	m ²	Porcentaje de ahorro reportado		Tamaño de la muestra	Merma de ladrillo	
1	150	4.5 Primer lugar	L1	200	10	Descalificada
2	200	5.7 Sin ahorro	L2	215	7	Segundo lugar
3	240	6.0 Sin ahorro	L3	315	13	Tercer lugar
4	400	6.2 Tercer lugar	L4	323	16	Descalificada
5	650	6.5 Segundo lugar	L5	500	22	Primer lugar
6	800	7.3 Sin ahorro	L6	898	49	Descalificada

Fuente: Elaboración propia.

por debajo del estándar (8.7%), se les declaraba como que no lograban demostrar una reducción significativa. Por esta razón, para limitar un poco esta primera solución de los alumnos, se tomó la decisión de cambiar en APM Ladrillera, la forma en la que se mostraban los datos, donde los resultados obtenidos de cada muestra se presentan sin transformarlos a porcentaje (parte derecha del Cuadro 1).

En la aplicación de la segunda versión de la APM Ladrilleras aún permaneció como primer intento de solución el modelo lineal o de proporcionalidad (porcentaje, regla de tres y porcentaje y tamaño de muestra), siete de doce lo seleccionan como una forma de solución (Cuadro 2). La buena noticia fue cuatro alumnos lograron visualizar el fenómeno aleatorio, por lo que se deben seguir en la búsqueda de alternativas para facilitar este proceso. Queda claro que no es posible aprender la distribución binomial y el uso de los modelos probabilísticos con una sola actividad, por lo que se debe buscar exponerlos a más experiencias de este tipo.

En ambas versiones el estudiantado que optó por resolver con regla de tres, fue difícil que cambiaran al modelo binomial, incluso afirmaban que se habían equivocado los evaluadores, o que el problema era erróneo o había corrupción, enseguida se expone una

Cuadro 2. Primer acercamiento a la solución de la APM Ladrilleras

Porcentaje	3
Descripción	3
Regla de Tres	1
Promedio	1
Porcentaje y Probabilidad	1
Binomial	1
Porcentaje y tamaño de muestra	1
Binomial e Inversa	1

Fuente: Elaboración propia.

conversación en WhatsApp al respecto en la APM Ladrilleras ("E2" corresponde al equipo 2 y "A" al estudiante):

E2A: Yo no puse descalificados. Puse aprobados.

Profesora: Pero L1 está descalificada

E2A: Tiene el 5% solo de merma. No está descalificada está aprobada, en el problema sí lo descalificaron porque evaluaron mal. Corrupción.

Profesora: Tienes que demostrar que tomaron la decisión correcta.

E2A: Jaja pero no lo hicieron 😊 Y ya lo comprobé. Con una simple regla de 3. Ya si lo meto a RStudio o Excel va ser más notorio su error.

Profesora: No. La decisión está bien tomada. Eso es seguro. La regla de tres no ayuda. De qué otra forma se puede demostrar que tienen razón.

E2A: No hay forma sin regla de 3.

Esta certeza de que los evaluadores estaban mal se presentó en ambas versiones al momento de realizar el trabajo en equipo, e incluso aquellos que en el trabajo individual (APM Ladrilleras) pensaron una solución diferente al modelo lineal fueron convencidos de que los evaluadores estaban equivocados, hasta que se les indicó que leyeran de nuevo la actividad y que los datos eran correctos empezaron a aceptar otras opciones.

Después de abandonar el método lineal, todos los equipos argumentaron que la actividad (en ambas versiones) estaba muy difícil de resolver y algunos cayeron en frustración. Esto ocurrió posterior a haber visto en el aula el tema de probabilidad y distribuciones de probabilidad y resolver ejercicios donde se utilizaba la binomial inversa.

Aunque no es objetivo de este reporte analizar las diferentes soluciones propuestas por los alumnos, para una rápida referencia del lector, conviene dejar asentadas dos formas en las que el alumnado podría

haber aplicado la distribución binomial y con ello analizar los resultados del concurso para la segunda versión de la APM. Por ejemplo, bajo el supuesto de que la merma poblacional es del 7% (el promedio de la industria), se pueden encontrar los valores LI y LS, entre los cuales puede caer un resultado muestral x con una probabilidad 0.95; es decir: $Pr(LI \leq x \leq LS | p = 0.07) = 0.95$; que bajo el supuesto de que x sigue una distribución binomial, los valores de LI y LS corresponden a cuantiles de la distribución binomial, que se pueden encontrar con la inversa de la distribución binomial, que en RStudio se obtienen con $LI = q_{0.025} = q_{binom}(0.025, n, p)$ y $LS = q_{0.975} = q_{binom}(0.975, n, p)$. De tal forma que si x cae fuera de ese intervalo es una evidencia contra $p = 0.07$, y en particular si $x < LI$, en una evidencia en favor de $p < 0.07$, que es lo que debería de garantizar cada ladrillera en el concurso.

Otra alternativa de solución es calcular la probabilidad de que x sea menor o igual al valor observado en la muestra, x_0 ; que con RStudio se obtienen con $p_{binom}(x_0, n, p)$, donde n es el tamaño de la muestra para cada ladrillera y $p = 0.07$ (el estándar de la industria). Entre más pequeña sea esta probabilidad más evidencia de que $p < 0.07$ para la correspondiente ladrillera; en particular si esa probabilidad es menor que 0.025, la ladrillera no debe ser descalificada (ver parte derecha del Cuadro 1).

Principio de documentación

Es posible identificar los conceptos estadísticos que el estudiantado utiliza, las relaciones que establecen entre ellos para argumentar una idea relacionada con el problema que resuelve, así como las operaciones que realiza y los patrones y regularidades que ve entre ellos, si existe claridad en lo que harán, para lo cual es fundamental la relación entre la narrativa del problema con la pregunta o preguntas guías y la presentación de los datos.

Tanto la narrativa como las preguntas de las APM tienen una clara vinculación, en ambas lo que se solicita hacer al estudiantado tiene una continuidad con la narrativa de la historia: En la APM Prefabricados se les pone en el papel del jurado calificador para evaluar el desperdicio en cualquier obra; por su parte en la APM Ladrilleras, se les solicita mandar una propuesta al periódico donde se explique la veracidad de las decisiones de los organizadores del concurso.

Sin embargo, como ya se indicó, la APM Prefabricados tiene dos preguntas guías y cuatro de apoyo, estas últimas además con lenguaje estadístico como: reducción significativa, criterios estadísticos y varia-

ción. La finalidad de las preguntas de apoyo fue guiarlos a pensar en la distribución binomial y que identificaran $Pr(LI \leq x \leq LS | p = 0.087) = 0.95$, lo cual no ocurrió por la complejidad de las mismas. Además, este tipo de preguntas guías no es lo que se propone en la PMM, porque no facilita que el estudiantado extienda sus conocimientos y experiencias personales para responderlas.

En cambio, la APM Ladrilleras tiene solo dos preguntas claras y sencillas directas de lo que se busca: identificar las descalificadas y la asignación de los tres primeros lugares. Esta sencillez y claridad permite centrarse en buscar una alternativa de solución y hacer uso de su conocimiento personal para plantear una solución.

De igual forma sucedió con el cambio en la presentación de los datos en la APM Ladrilleras (Cuadro 1, derecha), en donde se quitó el porcentaje. Ello permitió observar de forma más clara el conflicto generado por no poder resolverla con el porcentaje o la regla de tres (E1 corresponde al equipo 1 y las letras E y Q a las/los estudiantes).

E1E: Es correcto, pero... la primera produce 200 ladrillos y 10 son defectuosos, eso es el 5% y aun así estaba descalificada, decía? ... Ay es que no sé.
E1Q: Fíjate que yo tampoco, me cuesta trabajo el justificarlo, porque aquí la única forma de justificarlo es decir digamos que le dieron mal las indicaciones los del concurso, que no fueron claros.

E1E: No, pero con eso no...

E1Q: No, no es suficiente, y luego aquí hay una cosa que no cuadra y es que el segundo lugar tiene el menor porcentaje de todos, pero es el segundo.

El equipo 1, en su primer acercamiento utilizó el porcentaje, el cual al no estar presente en los datos se tiene la certeza que es una extensión de sus conocimientos, cuestión que no fue clara en la APM Prefabricados donde se les proporcionó el porcentaje, lo que marca una diferencia en cuanto a identificar el uso de sus experiencias para solucionar problemas.

Principio de compartición y reutilización de construcción

Para evaluar este principio se decidió implementar una actividad parecida en la cual se proporcionó como dato el porcentaje de ahorro de un material a nivel nacional y los tamaños de muestra que deberían analizar. Es decir, diferente realidad, mismo problema. Sin embargo, nadie pudo resolverlo sin una guía muy dirigida para que pudieran ver las similitudes con el problema anterior. Por lo que queda de manifiesto la

dificultad para identificar fenómenos aleatorios y encontrar la distribución que mejor los modele.

Conclusiones

En esta investigación se analizó el refinamiento de una APM desde las dificultades a las que se enfrentan los investigadores y el profesorado para diseñar problemas que apoyen el desarrollo de la comprensión de la aleatoriedad.

En este proceso de refinación, la evaluación para darle el sentido de realidad arrojó varias consideraciones, entre ellas, la importancia de *ponerse en los zapatos* del estudiantado. Al mirar cómo ellos ven la realidad se modificó la APM, y esta modificación trajo consigo la creación de nuevos modelos por parte del estudiantado y una nueva modificación de la APM, porque se modificó más la visión que los diseñadores tenían de lo que es real o puede ser real para el estudiantado.

Este proceso de autoconocimiento de lo que conoce el estudiantado propició la modificación de la APM, a su vez, al implementarse, modificó los procesos de pensamiento del estudiantado, con lo que volvió a modificar el pensamiento de los diseñadores, en un constate ir y venir de mejora continua (tal como lo menciona Lesh, 2010).

En este estudio se identificó cómo muchos conceptos fundamentales en probabilidad y estadística como reducción significativa, fundamentación estadística, criterios estadísticos, generalizable, variación y muestra, están tan interiorizados en los investigadores y el profesorado que no se percibe que en la vida real del estudiantado este lenguaje no es usado, hasta que se autoevalúan.

Asimismo, se ratificó la importancia de plantear actividades basadas en datos, donde las decisiones intuitivas apoyadas en el pensamiento lineal no sean una opción válida, de tal forma que se obligue al estudiante buscar otras alternativas, tales como recurrir a modelos probabilísticos. Justo esto se logra más claramente con la segunda versión de la APM Ladrilleras.

Referencias

Abramovich, S. (2013). Modeling as Isomorphism: Using New Technologies in Mathematics Teacher Education. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. ICTMA 13. New York, Ny: Springer. 501-510.

Amit, M. y Jan, I. (2010). Model Eliciting Environments as "Nurseries" for Modeling Probabilistic Situations En

R. Lesh, P. L. Galbraith, C. R. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies*. New York, NY: Springer. 155-166.

Årlebäck, J. B. y Doerr, H. M. (2020). Moving Beyond Descriptive Models: Research Issues for Design and Implementation. *AIEM Avances de Investigación en Educación Matemática*, 17, 5-20.

Aymerich, À. y Albarracín, L. (2022). Modelización matemática en actividades estadísticas: Episodios clave para la generación de modelos. *Uniciencia*, 36, 1, 1-18. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.16>

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: Goals, Definitions, and Challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Kluwer Academic Publishers. 3-15. <http://www.springeronline.com>

Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K. y Ainley, J. (2018). Design of Statistics Learning Environments. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education*. *Springer International Handbooks of Education*, https://doi.org/10.1007/978-3-319-66195-7_16

Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. ww.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Dooren, W. V.; Bock, D., Depaepe, F., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2003). The Illusion of Linearity: Expanding the Evidence Towards Probabilistic Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 2, 113-138. Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Garfield, J., Delmas, R. y Zieffler, A. (2012). Developing Statistical Modelers and Thinkers in an Introductory, Tertiary-Level Statistics Course. En *ZDM Mathematics Education* 44, 883-898. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0447-5>

Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climático (INECC) (2016). *Análisis de Mercado del Sector de la Construcción y Proyecto Piloto a Nivel Región, Basado en un Portafolio de Políticas Públicas con el Objetivo de Reducir los Contaminantes Climáticos de Vida Corta (CCVC) de Ladrilleras Artesanales en México. Informe Final*. Instituto Nacional de Ecología y Cambio Climático (INECC). México.

Konold, C. (1995). Issues in Assessing Conceptual Understanding. *Probability and Statistics, Journal of Statistics Education*, 3,1, 1-9. DOI:10.1080/10691898.1995.11910479

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. In A. Kelly, R. Lesh (Eds.), *Research Design in Mathematics and Science Education*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. 591-646.

Lesh, R. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjecture

- res for Investigating What it Means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modelling and Application* 1,2, 16-48.
- Noll, J., Clement, K., Dolor, J., Kirin, D., y Petersen, M. (2018). Students' Use of Narrative when Constructing Statistical Models in TinkerPlots. *ZDM Mathematics Education*, 50, 7, 1267-1280 doi.org/10.1007/s11858-018-0981-x
- Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., y Budgett, S. (2018). Innovations in Statistical Modeling to Connect Data, Chance and Context. *ZDM Mathematics Education*, 50, 7, 1113-1123, doi.org/10.1007/s11858-018-0989-2
- Sevinc, S. y Lesh, R. (2018). Training Mathematics Teachers for Realistic Math Problems: A Case of Modeling-Based Teacher Education Courses. *ZDM Mathematics Education*, 50, 7, 301-314. Springer. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0898-9