Una propuesta para la enseñanza universitaria de los fundamentos de la matemática

Alfonso Segundo Gómez Mulett[1]

Resumen

La enseñanza de los fundamentos de la matemática en el nivel universitario presenta varias facetas. Con el ánimo de terciar en la discusión, en este trabajo se presenta una alternativa para su enseñanza en un primer curso universitario de matemática, atendiendo al significado de los fundamentos y a las diferentes propuestas curriculares exhibidas en diferentes escenarios y teniendo también en cuenta el significado de los términos fundamentos y conceptos básicos.

Descriptores: Fundamentos, Enseñanza, Lógica, Currículo.

A Proposal for University Education in the Foundations of Mathematics

Abstract

The teaching of the foundations of mathematics at university level has several facets. With the aim to mediate in the discussion, this paper presents an alternative to teaching in a first university course in mathematics, taking the meaning of the foundations and different curricular proposals exhibited in different scenarios and taking into account the meaning of the terms of fundamentals and basics.

Key words: Foundations, Teaching of mathematics, Logic, Curriculum.

Artículo recibido el 25/07/2010
Artículo aceptado el 17/10/2010
Conflicto de interés no declarado

1 Profesor Programa de Matemáticas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Cartagena. Cartagena, Colombia. Candidato a Doctor en Educación. RUDECOLOMBIA agomezm1@unicartagena.edu.co, alsegomu@yahoo.com

Introducción

El trabajo que se expone a continuación es una postura personal sobre lo que debe ser la enseñanza de los fundamentos de la matemática en un primer curso universitario, la cual surge ante la diversidad de contenidos programáticos para este curso en las universidades del Caribe Colombiano y la alarmante disparidad de apreciaciones con respecto al significado de los fundamentos, tanto en la parte conceptual como en la concepción de los profesores sobre el tema. La anterior consideración se basa en la investigación realizada por el autor sobre este tópico a escala de las universidades del Caribe Colombiano, la cual llevó a hacer precisiones en aras de aportar su conocimiento para contribuir al mejoramiento de la enseñanza.

Los fundamentos de la matemática

La preocupación por los fundamentos de la matemática no es cosa reciente. Según Chaitin,[1] llevamos más de un siglo de controversia sobre los fundamentos de la matemática; no obstante, en este trabajo se considera que esta preocupación lleva más de veinte siglos, pues Beth[2] habla sobre la prehistoria de la investigación en los fundamentos comenzando con las escuelas filosóficas griegas de Demócrito, Filolao, Heráclito, Platón y Aristóteles entre otros, considerados como predecesores del pensamiento de hombres como Cantor, Frege y Russell, todos ellos empeñados en la búsqueda de un fundamento para la ciencia en general.

La enseñanza de los fundamentos de la matemática, hablando en sentido estricto, comienza con la fundamentación de la matemática desde sus orígenes en las antiguas civilizaciones de Mesopotamia y Egipto, cuando la ciencia matemática se desarrolló conjuntamente con la escritura. Como no son muchas las evidencias dejadas por estas culturas, los trabajos sobre los orígenes y desarrollo de la ciencia comienzan con los griegos; sin duda, el mayor impulso a los fundamentos de la matemática fue dado a partir de Frege, Cantor y Peano en el último tercio del siglo XIX y Russell y Hilbert en los comienzos del siglo XX.

Existe una amplia investigación sobre el tema, surgida a partir de las llamadas crisis de los fundamentos, la primera de ellas provocada por el descubrimiento de los números irracionales, término dado por los griegos a tales números cuando se creía en la racionalidad como meta suprema del pensamiento; así, el concepto de número irracional en la Grecia antigua era algo así comparado con el teorema de completitud de Gödel en el mundo moderno. La segunda crisis fue causada por el empleo de los infinitesimales en el cálculo como cantidades evanescentes, luego vino la crisis sobre el postulado de las paralelas que dio origen a las geometrías no euclidianas; surgieron después las paradojas de la teoría de conjuntos y finalmente el teorema de incompletitud.

Fundamentos es la traducción dada en español a dos vocablos en lengua inglesa: F*oundations* y F*undamentals*. La primera de estas palabras se refiere a los principios, a la base epistemológica sobre la cual se construye la matemática, su génesis o naturaleza; la segunda, se refiere a los conceptos y teorías que son requisitos o a partir de los cuales se desarrollan los demás conceptos. En el primer sentido, los fundamentos están constituidos por la lógica y la teoría de conjuntos, o simplemente, la lógica si esta última teoría está contenida en la anterior, aunque para Manzano (2004) los fundamentos de la matemática están constituidos por la lógica básica, la teoría de modelos, la teoría de la recursión, la teoría de la prueba y la teoría de conjuntos. En el segundo sentido, los fundamentos están constituidos por las teorías específicas que sirven como base para el desarrollo de otra teoría, así por ejemplo, el álgebra clásica, la trigonometría y la geometría analítica son fundamentos del cálculo.

En esta exposición la expresión *fundamentos de la matemática* es sinónimo de *lógica y teoría de conjuntos*, pues son estas teorías las que hasta hoy han servido de base, tanto en lo matemático como en lo didáctico para la construcción de la matemática como *foundations*; así las cosas, la lógica y la teoría de conjuntos constituyen los fundamentos de la matemática; no obstante, para llegar hasta este punto se expondrán concepciones diversas sobre el tema.

El término fundamentos de matemática tiene una interpretación clara en el sentido matemático: significa lógica matemática, pero también tiene un sentido menos claro que puede variar de un contexto a otro. En términos filosóficos, el término fundamentos es asociado con la idea de darle un sustento a la matemática.

Para Putman (1967), hay tres niveles de interpretación del término fundamentos. El primero, cuando la gente tiene un pensamiento primario con el cual trata de reducir una teoría a otra; es lo que Jubien

(1981) llama reducibilidad formal, en este caso, reducir la matemática a la teoría de conjuntos, convirtiéndose el sentido filosófico en un sentido estrictamente matemático. En el segundo nivel de interpretación, los fundamentos están vinculados a lo filosófico, en el sentido de dar o proveer de una semántica formal a las teorías matemáticas formalizadas, buscando una relación entre las teorías formales bajo interpretación y la matemática real. El tercer nivel de interpretación pretende dar un significado a las proposiciones matemáticas, sentido que raramente es discutido, ya que la argumentación no se fija en lo semántico en vez de lo sintáctico y lo pragmático.

Dentro de los fundamentos surgen dos problemas de orden filosófico. El primero hace referencia a la naturaleza de los entes matemáticos, convirtiéndose en un problema de tipo ontológico; el segundo, se refiere a las limitaciones del conocimiento matemático, tratándose entonces de un problema epistemológico. Un tratamiento para la solución del primer problema lleva a considerar los conceptos y entes matemáticos reducibles a conceptos lógicos como lo propone el logicismo. De otra parte, los intuicionistas consideran que los entes matemáticos son producto de la intuición en el sentido de Kant; para los empiristas, los entes matemáticos son propiedades de las cosas; y para los realistas, los entes matemáticos tienen una existencia trascendente. El segundo problema consiste en la solución del problema del infinito para el que existen una variedad de soluciones como la dada por Zermelo con la introducción del postulado de inducción transfinita, el cual, en forma sencilla, expresa que, si un predicado A es válido para objetos confiables $A(\tau(A))$, entonces A es válido para cualquier objeto a; es decir, $A(\tau(A)) \longrightarrow A(a)$.

Desde el punto de vista pragmático los fundamentos están dentro de la misma matemática como teorías fundantes de las diferentes ramas o áreas de la matemática; para otros, los fundamentos están fuera de la matemática, en la llamada filosofía natural como sucede con todas las ciencias empíricas. Según Henkin (1971), los fundamentos se encuentran en las diferentes teorías sobre la construcción de la matemática: logicismo, formalismo e intuicionismo. El trabajo fundacional está basado en aspectos teóricos de la teoría de conjuntos, aspectos algebraicos y aspectos constructivos asociados con las tres vertientes filosóficas señaladas. Los aspectos teóricos sobre conjuntos fueron estudiados independientemente por Cantor y Frege. Cantor desarrolló la teoría de conjuntos como un fundamento para el estudio de los conjuntos infinitos, generalizando las nociones de números cardinales y ordinales yendo hacia arriba; Frege procedió hacia abajo para explicar la teoría de números naturales en términos de las nociones teóricas sobre conjuntos.

La enseñanza de los fundamentos de la matemática

En el orden mundial ha sido difícil implantar un acuerdo universal sobre cómo enseñar la matemática y cuáles deben ser los temas que debe incluir el currículo de acuerdo con los diferentes niveles de escolaridad atendiendo al desarrollo mental de los individuos en las diferentes etapas de la vida ya que, además de existir diferentes teorías sobre su, también existen diversas teorías sobre una concepción epistemológica de la matemática. No obstante, existen ciertos acuerdos sobre la enseñanza de algunos temas a escala regional o a escala de las asociaciones de profesores dedicados a la enseñanza de la matemática. Los investigadores en educación matemática han desarrollado diversas teorías sobre la conceptualización y enseñanza de la matemática, pero a pesar de ello las investigaciones en educación matemática están lejos de ser un campo unificado (Artigue, 2003).

Prueba de lo anteriormente señalado es que en cada congreso se presentan nuevas alternativas cada vez más específicas, lo cual dificulta el hallazgo de una teoría sintetizadora; en parte, esto se debe a que los procesos de enseñanza y aprendizaje dependen del entorno cultural, del conocimiento personal del profesor sobre la matemática, de los textos para el estudio y de la normatividad en materia de educación de cada país.

Por otra parte, la matemática y su enseñanza han evolucionado a través del tiempo según las diferentes teorías que permiten su construcción. De acuerdo con la actividad matemática es considerada como una práctica eminentemente social (Font, 2003), influida por las creencias de los actores encargados de esas prácticas, ya sean personas u organizaciones. La actividad matemática se entiende como la producción, uso, aprendizaje y comunicación del conocimiento matemático. De allí que los investigadores han elaborado un gran volumen de investigaciones en lo local con escasa repercusión en lo global, investigaciones que cambian muy poco o difícilmente la práctica pedagógica en el caso de la matemática. Con base en estas observaciones se discutirán aquí las teorías de mayor incidencia o aceptación en la enseñanza de la matemática, las creencias que tienen los

profesores sobre la matemática y su enseñanza y el caso específico de la enseñanza de los fundamentos de la matemática.

Los fundamentos de la matemática y su enseñanza están estrechamente ligados a las ideas acerca de la construcción y evolución de esta disciplina. La evolución de las matemáticas lleva consigo la evolución de su enseñanza con algunas variaciones a causa de otras teorías influyentes como la filosofía, la psicología, la pedagogía, la sociología y la lingüística. La discusión sobre los fundamentos de la matemática se ha relegado a las tres escuelas tradicionales de la filosofía matemática que son el logicismo, el formalismo, el intuicionismo; además de ellas se consideran también como escuelas el platonismo y el constructivismo.

En la enseñanza de la matemática a nivel universitario, los fundamentos se han entendido generalmente como una parte de la matemática o como un conjunto de teorías o conceptos iniciales en el estudio de la matemática. Una mirada a los textos universitarios escritos después de la segunda mitad del siglo pasado, indica que, por lo general, el término fundamentos en el contexto del continente americano se refiere al álgebra y la trigonometría como disciplinas teóricas necesarias para el desarrollo del cálculo.

A partir de la década de los sesenta en el sigo pasado, adicionalmente se incluyen otras temáticas que involucran la lógica, los conjuntos, teoría básica de matrices, etc., agrupadas en algunos casos con el nombre de matemática básica o precálculo, que de alguna manera se presentan como enlaces o aproximaciones a la interpretación clara de los fundamentos. Esta inclusión en parte se debió a las reformas forjadas a partir de los diferentes congresos, seminarios y conferencias sobre educación matemática, y a la propuesta presentada por la corriente del pensamiento crítico.

Hoy en día, muy a pesar de los continuos esfuerzos presentes por dar rigor a la matemática y su enseñanza de acuerdo con la implantación de la matemática moderna dada por el Grupo Bourbaki, la historia reciente de la enseñanza muestra que, siendo la lógica un elemento sustancial de los fundamentos de la matemática, ésta no se emplea adecuadamente, sino que aparece en los diferentes programas de los cursos básicos universitarios de matemática como un tema aislado, y aunque esta corriente haya recibido muchas críticas desde siempre, sin ella sería imposible construir y enseñar matemática con algo de rigurosidad.

Cualquiera que sea la idea acerca de la conveniencia o no de las matemáticas modernas, lo cierto es que si se quiere enseñar matemáticas debe tenerse al menos un mínimo de rigurosidad en lo que se hace; por tal razón Flórez (1996) se refiere al rigor en los siguientes términos:

> "El rigor es entonces el proceso de poner en términos 'opacos' a la intuición, problemas acerca de los cuales tenemos una percepción intuitiva muy fuerte. Gran parte de la matemática y la lógica modernas se han desarrollado justamente sobre el 'obscurecimiento de lo intuitivo'. Fácil es comprender los riesgos que ésta metodología encierra, en tanto ninguna garantía se nos puede dar acerca de la existencia de nuevas relaciones intuitivas entre estas ideas opacas, relaciones que ahora aparecerán todavía más ocultas. De cualquier manera esta metodología ha permitido el desarrollo explosivo de métodos formales altamente complejos, los cuales han tenido un impacto enorme en el desarrollo de la teoría de los ordenadores, la genética, la teoría de la comunicación, etc." (p .66).

El rigor en la enseñanza de la matemática está dado a través de la explicación plausible de la matemática misma, concibiendo una base teórica en el sentido de una matemática, es decir, dotándola de un soporte a partir del cual se pueda construir todo el edificio. Este soporte está dado por los fundamentos, entendidos como una teoría simiente que explique el porqué de las cosas, evitando que los hacedores de la matemática hagan el trabajo de manera autómata.

La lógica como fundamento de la matemática

No puede esperarse que se conozca el espíritu de la ciencia matemática si no se conoce su fundamento, es decir, si no se conoce la lógica como la parte medular de la matemática responsable de la validación del conocimiento matemático. Según Milne (2004), antes de hacer cualquier afirmación sobre la enseñanza de la lógica debe preguntarse primero por el objetivo o el propósito de su enseñanza; resuelta esta inquietud, entonces procederíamos a determinar si la enseñanza responde a los objetivos, y sean cuales fueran éstos, existen tres puntos de vista para su cometido. El primero lo llama *terapia* y con ello la lógica se enseña para estructurar el pensamiento y construir buenos argumentos en cualquier disciplina; el segundo lo llama *juego de herramientas*, atañe a la en-

señanza de la lógica formal o lógica de primer orden refiriéndose a la lógica aristotélica, y más específicamente al contenido del Órganon, con el propósito de hacer precisiones en el lenguaje y evitar ambigüedades; el tercer propósito es enseñar la lógica como un *cuerpo de conocimientos*, como un conjunto de conceptos, teorías, formas de argumento y reglas de deducción. Este cuerpo de conocimientos se presenta en algunos textos como "corte y pegue", olvidándose de que para llegar a este cuerpo de conocimientos se han dado muchos debates en lógica y filosofía de la matemática lo largo del siglo XX, invisibles para un estudiante de primer año.

Otro punto de vista (Fisher, 1988, citado por Milne, 2004) señala que la enseñanza de la lógica formal tiene como objeto el estudio de la argumentación como modelo matemático de la prueba. El modelo involucra un conjunto de premisas a partir de las cuales debe extraerse una conclusión, dicho modelo no está dirigido a ninguna colectividad en particular, la argumentación no pretende convencer a nadie, pues esta opera, según Frege, con las leyes de la verdad en vez de las leyes del pensamiento, porque la lógica formal no tiene conexión con el razonamiento ordinario; los argumentos son propuestos en la tentativa de alcanzar un equilibrio reflexivo entre la intuiciones de buenas prácticas de inferencia y el propósito de la inferencia deductiva. En algunas disciplinas diferentes de la matemática y en los primeros cursos de lógica de la argumentación en el primer año de estudios universitarios, estos razonamientos se presentan como argumentaciones dentro de lo real con el fin de hacerlos más atractivos para los estudiantes.

La lógica de la argumentación o teoría de la argumentación o pensamiento crítico fue un movimiento originado en Norteamérica e Inglaterra en la década de los setenta, dentro de la corriente llamada lógica informal, generada por la insatisfacción con la enseñanza tradicional de los cursos de lógica formal. El nombre de P*ensamiento* C*rítico*, se derivó de un texto de lógica publicado con el mismo nombre en 1946 por Max Black, mientras que la corriente de lógica informal es dado por Gilbert Ryle,[3] quien junto con Wittgenstein y Austin contribuyó a propiciar las condiciones para ello en los análisis del lenguaje natural, estableciendo un puente entre el análisis lingüístico y el pensamiento crítico a través de la lógica informal. Otros aportes en esta dirección se deben a Stephen Toulmin, Michael Scriven, Robert Forgelin, C. Hamblin y Rupert Crawsahy Williams.

Se entiende por pensamiento crítico, el pensamiento capaz y responsable que conduce al juicio apoyándose en criterios siendo auto corrector y sensible al contexto, "la habilidad de analizar hechos, generar y organizar ideas, defender sus opiniones, hacer comparaciones, hacer inferencias, evaluar argumentos y resolver problemas" (Chance, 1986:6); "un proceso consciente y deliberado que se utiliza para interpretar o evaluar información y experiencias con un conjunto de actitudes y habilidades que guíen las creencias fundamentadas y las acciones" (Mertes, 1991:24); "el pensamiento crítico es un proceso intelectual, disciplinado y activo que desarrolla habilidades como: conceptuar, aplicar, analizar, sintetizar, y/o evaluar información, experiencia, reflexión, razonamiento o comunicación, como una guía hacia la creencia y la acción". (Scriven y Paul, 1992); "el pensamiento crítico es la habilidad para pensar correctamente, para pensar creativa y autónomamente dentro de, y acerca de las mirada de disciplinas, entonces ciertamente es un objetivo educacional de extrema importancia" (Sharp, 1989:6).

El pensamiento crítico o lógica informal es un medio para la verificación del conocimiento adquirido por el estudiante universitario; además de ello es una herramienta que le permite enfrentarse a la tarea de argumentar, demostrar, deducir, conjeturar, sistematizar una teoría organizar el pensamiento y abstraer como producto final de el aprendizaje de la matemática; pues si bien no es un método riguroso para la fundamentación de la matemática, constituye una aproximación al reconocimiento de argumentos válidos y no válidos; por tanto, la esencia de la matemática es la demostración, ya que por amplio que sea el dominio de los cálculos, estos no implican el razonar adecuadamente.

En concordancia con lo expuesto anteriormente se sugiere entonces que un curso propedéutico de Fundamentos de la Matemática para los estudiantes que inician los estudios universitarios en los programas de Licenciatura en Matemáticas, o en los que el estudio de la matemática contempla el cálculo y el álgebra lineal debe contener los siguientes temas: Cálculo proposicional, teoría general de la inferencia, cálculo de predicados, estudio de las falacias, definición de axiomática, ejemplo de una axiomática, operaciones con conjuntos, producto cartesiano, relaciones, relaciones de orden, relaciones de equivalencia, funciones, concepto de operación, concepto de sistema numérico y construcción de los sistemas numéricos (naturales, enteros racionales, irracionales y reales).

La enseñanza de los sistemas numéricos puede hacerse de tres maneras. La primera consiste en introducir los conceptos de Sistema Matemático y Sistema Numérico deduciendo a partir de este último el concepto de número; luego se construyen los naturales según Peano y después los demás sistemas con base en las clases de equivalencia. La segunda alternativa es una variante de la anterior, considerando primero el conjunto de los números naturales según Peano, y posteriormente construir los demás sistemas con base en la aritmetización del análisis. La tercera alternativa corresponde a la presentación de los reales desde el punto de vista axiomático.

Se advierte que esto es posible después que en los niveles de enseñanza primaria y secundaria se haya incluido una introducción a la lógica como formalizadora del lenguaje, una introducción a la teoría de conjuntos extendida al concepto de función y una introducción a los argumentos deductivos desde lo práctico, es decir, desde la construcción del conocimiento matemático bajo la cual razonar debe constituirse en una habilidad de la cotidianidad en el aprendizaje de la matemática.

Para llevar a cabo la propuesta esbozada es necesario hacer un inventario de los recursos necesarios con el propósito de garantizar su realización. Este inventario comprende dos elementos: 1. Que el profesor tenga una idea clara acerca de qué es la matemática, es decir, una concepción epistemológica y algunas ideas sobre el conocimiento y cómo se obtiene. 2. Debe conocer de qué trata la lógica y cuál es el papel que ella juega en la construcción de la matemática a través de la prueba. Teniendo en cuenta estos dos aspectos la enseñanza de los fundamentos de la matemática sería provechosa, puesto que si los profesores tuvieran esos estudios epistemológicos previos, además de lograr una contextualización de los conceptos matemáticos, podrían dar una explicación plausible de los fundamentos además de ubicar al estudiante en la base misma de la matemática.

A manera de cierre

Finalmente se advierte que es peligroso tomar posiciones simplistas en torno a la enseñanza de los Fundamentos de la Matemática, al enseñar solamente los conceptos fundamentales llamados también básicos en ausencia de la lógica y la teoría de conjuntos. Esta posición elimina las reflexiones didáctico-epistemológicas, pues esto llevaría a privar a los alumnos de conocer el germen de la matemática y de transitar por el camino que conduce a recorrer el edificio matemático, del cual sólo conocerían su fachada. No debe olvidarse que la lógica es importante porque organiza el pensamiento sirviendo además como base para la conceptualización de la teoría de conjuntos, pilar primordial en la fundamentación de la matemática.

Referencias

ARTIGUE, M. (2003). "¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario?". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10, 2, 117-134.

CHANCE, P. (1986). *Thinking in the Classroom: A survey of programs*. New York: Teachers College, Columbia University.

FLÓREZ, F. (1996). *Siete ensayos sobre la libertad*. Estocolmo: Universidad de Lund.

FONT, V (2003). "Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática". *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10, 2, 249-279.

HENKIN, L. (1971). "Mathematical Foundations for Mathematics". *The American Mathematical Monthly*, 78(5), 463-487.

JUBIEN, M. (1981). "Intensional Foundations of Mathematics". *Special Issue on Philosophy of mathematics*, 15(4), 513-527.

MANZANO, M. (2004). *Summa logicae en el siglo* XXI. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

MERTES, L. (1991). "Thinking and writing". *Middle School Journal*, 22, 24-25.

MILNE, P. (2004). "Notes on teaching logic". *Discourse: Learning and teaching in philosophical and religious studies*, 4, 1, 137-158.

PUTMAN, H. (1967). "Mathematics without Foundations". *Journal of Philosophy*, 64, 5-22.

SCRIVEN, M., y PAUL, R. (1992). Critical Thinking Defined. Handout Given at Critical Thinking Conference. Atlanta: GA.

SHARP, A. (1989). "Critical thinking and comunities of inquiry". *Inquiry: Critical thinking across de disciplines* 1, 3, 1-12.

Notas

1. G Chaitin lo afirma en su conferencia titulada "Un siglo de controversia sobre los fundamentos de la matemática" presentada el 2 de marzo de 2000 en la Universidad Carnegie Melon.
2. Beth, Evert (1952). The Prehistory of Research into Foundations. *The British Journal Fort the Philosophy of Science*, 3(9), 5-81.
3. Ryle, G (1966). Formal and Informal Logic. *Dilemmas*, 8(1), 11-129.