Conceptos matemáticos en estudiantes de bachillerato. ¿Qué queda al final del desarrollo de un plan de estudio?

José Jiménez-Mora[1]

Resumen

La construcción e incorporación de conceptos matemáticos a las estructuras de conocimientos de los estudiantes, particularmente en planes de estudio donde los contenidos están articulados de manera vertical, son tareas cuya realización atraviesa por las formas de enseñanza a la que se ven sujetos los estudiantes. La hipótesis sostenida en este trabajo en ese sentido afirma que como resultado del tratamiento de los contenidos en un ambiente de enseñanza donde se insiste en la reflexión sobre los significados de los conceptos matemáticos, los estudiantes son capaces de recordarlos en nuevas experiencias donde se requiere su comprensión. Tras un período de trabajo de dos años con dos grupos de estudiantes de educación media superior sujetos a dos modelos distintos de enseñanza –uno con énfasis en el carácter conceptual del conocimiento matemático y otro con énfasis en su carácter instrumental– en este documento se presentan sus resultados comparados en términos de los elementos que son capaces de evocar respecto de un conjunto de conceptos clave contemplados en la asignatura de Matemáticas a lo largo de ese período.

Descriptores: Conceptos matemáticos, Comprensión, Evocación, Estudiantes de bachillerato.

Mathematical Concepts in High School Students. What is the End of the Development of a Plan of Study?

Abstract

The construction and incorporation of mathematical concepts to the knowledge structures of students, particularly in curriculum where the contents are pinned vertically, are tasks whose completion is going through the forms of education that students are subjected. The hypothesis of this paper argues that as a result of teaching in one environment of learning with emphasis on reflection about the mathematical concepts, the students are capable of remember them in new experiences where understanding of these concepts are required. After two years with two groups of high school students exposed to two different teaching models, one with emphasis on conceptual nature of mathematical knowledge and the other based on its instrumental character, in this paper the level of recall of mathematical concepts in both groups are compared.

Key words: Mathematical Concepts, Understanding, Remember, High School Students.

Artículo recibido el 17/01/2011
Artículo aceptado el 23/04/2011
Declarado sin conflicto de interés

1 Investigador asistente en el Departamento de Estudios en Educación, Centro Universitario de Ciencias Sociales y Humanidades de la Universidad de Guadalajara, México. pepe_dw@hotmail.com

Introducción

Cuando se ha realizado una evaluación del aprendizaje escolar en nuestro país, a través de instrumentos como los exámenes del Programa internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) (OCDE, 2000), o la prueba ENLACE (Evaluación del Logro Académico en Centros Escolares), los resultados evidencian bajos niveles de conocimientos y habilidades de los alumnos de distintos sistemas educativos. Lo anterior se acentúa en el área de matemáticas.

En el terreno de la educación matemática, este tipo de fenómenos ha dado lugar a una de las principales líneas de investigación, relacionada con el modo en que se construye significado sobre los conceptos matemáticos en las prácticas de enseñanza en el aula, cómo intervienen los conocimientos previos de estudiantes y profesores en el acercamiento al conocimiento matemático y qué nociones terminan formando parte de las estructuras de conocimiento de los estudiantes son cuestiones asociadas a lo anterior, cuyo estudio se remonta a más de una década (Santos, 1996; Gómez, 1998). Asimismo, la investigación más reciente desde una perspectiva cognitiva sobre el aprendizaje matemático sitúa a los conceptos como un componente fundamental (Dahl, 2004; Arzarello, Robutti y Bazzini, 2005; Tate, 2006; Kotsopoulos, 2007; Mulligan y Mitchelmore, 2009).

Por otra parte, la experiencia como profesor de matemáticas de quien realizó este trabajo, revela que los estudiantes, aunque hayan sido guiados en el aprendizaje de conceptos matemáticos fundamentales y en algunas de sus relaciones en la disciplina, olvidan una gran parte de ellos al pasar a niveles educativos posteriores, por lo que el profesor se ve en la necesidad de recordarlos o volverlos a enseñar.

En qué medida y de qué forma son recordados ciertos conceptos matemáticos clave que forman parte de los programas escolares de esta disciplina en el bachillerato son las cuestiones principales sobre las cuales trata este estudio. Los datos analizados corresponden a grupos escolares expuestos a dos modelos distintos de enseñanza, uno centrado en el carácter instrumental del conocimiento matemático, y otro centrado en la reflexión sobre los conceptos.

El aprendizaje de conceptos matemáticos en el aula

Como señala Ausubel (2000), una de las tareas pendientes de la investigación en psicología cognitiva tiene por objeto el estudio de la adquisición y retención, a largo plazo, de cursos enteros que forman parte de los diversos programas de estudio en las escuelas. La *adquisición y retención de conocimientos*, como se concibe en la obra antes citada, incluye las representaciones generadas sobre los conceptos en las estructuras cognitivas de los estudiantes, así como el modo en que tales representaciones cambian en función de su madurez intelectual y del grado de complejidad de los nuevos contenidos a aprender.

Sin duda, una variable que incide en el aprendizaje de los conceptos, en particular en el caso de los de carácter matemático, es la forma en que son presentados por el profesor en el contexto del aprendizaje escolar, donde tales conceptos se estructuran y se aplican de manera específica, como parte de un diseño de enseñanza del conocimiento disciplinar en el aula, en el proceso descrito por Chevallard (1996) como "transposición didáctica".

Durante la enseñanza del cálculo diferencial, por ejemplo, un concepto esencial, como "derivada de una función" puede ser entendido por los estudiantes únicamente como una "operación", si la actividad en el aula se encuentra centrada en la manipulación de símbolos a través de reglas y fórmulas. Una enseñanza de este tipo incide en una débil construcción de significado sobre los conceptos. En el caso del concepto mencionado como ejemplo, una comprensión más profunda implica que los estudiantes se apropien del significado de la derivada como razón de cambio o velocidad *instantánea* de aumento o descenso en fenómenos cuya variación sigue un patrón dado por una función.

Godino y Recio (1998) apuntan, con relación a lo anterior, que el significado se desprende de las acciones que el estudiante ejecuta sobre los objetos matemáticos, a las que denominan "prácticas prototípicas significativas". De acuerdo con estos autores, en estas prácticas los estudiantes comunican de manera implícita su modo de ver los conceptos matemáticos. De modo, en un ambiente de enseñanza que enfatiza el carácter instrumental del conocimiento matemático, el concepto "derivada de una función" –que implica reconocer el concepto "función"– termina siendo referido por los estudiantes como una operación o procedimiento algorítmico que se aplica a expresiones del tipo "f(x)=". Sin embargo, la resolución de problemas en los cuales se utilizan estos conceptos exige la abstracción y comprensión de sus propiedades particulares, no sólo de los procedi-

mientos en los que intervienen los símbolos y términos matemáticos.

En este sentido, Dubinsky (1994), distingue dos formas en las cuales los estudiantes construyen los conceptos matemáticos:[1]

- La "definición conceptual", por la cual los estudiantes son capaces de verbalizar una serie de ideas y proposiciones asociadas al concepto.
- La "imagen conceptual", que corresponde a una representación interna no verbal asociada al concepto en la mente de los estudiantes.

Duval (1999), por su parte, explica la formación de los conceptos en la estructura de conocimientos de los estudiantes, en términos de dos operaciones mentales, a las cuales denomina respectivamente "semiosis" y "noesis". La tesis de Duval es que la semiosis es condición indispensable para la noesis, esto es, que para aprehender el contenido esencial de un concepto (noesis) es indispensable poderlo captar y comunicar en distintos sistemas de representación, verbales y no verbales (semiosis).

Ambas posturas ponen de relieve que la construcción del significado de los conceptos matemáticos y la comprensión de nuevos conceptos, requiere que los estudiantes sean capaces de emplear una variedad de recursos de representación verbales y no verbales, cuestión señalada por Tate (2006) como esencial para la resolución de tareas matemáticas.

Desde la perspectiva anterior, en un ambiente de enseñanza como el que se centra en el carácter instrumental del conocimiento matemático, se puede esperar en el aula un ejercicio aceptable de la semiosis, por el cual los estudiantes alcanzan a manipular los símbolos en correspondencia con los procedimientos y reglas establecidas, en una clase donde se hacen muchos "ejercicios" para "reafirmar el conocimiento". Sin embargo, como muestran los datos que se presentan más adelante, la noesis, o construcción de significado del concepto en este tipo de entornos de enseñanza es pobre. Los estudiantes pueden utilizar para comunicarse expresiones como "derivada", o "regla de la cadena", y símbolos como "f '(x)" (en México, se lee "f prima de x"), sin una comprensión de la naturaleza del concepto que vaya más allá de su carácter procedimental.

El estudio realizado

Para examinar el grado y la forma en que los conceptos matemáticos son recordados por los estudiantes, se construyó un diseño cuasiexperimental, de dos grupos. Conviene recordar que en este tipo de diseño se comparan resultados con una lógica similar a un diseño experimental, pero sin haber realizado un experimento en sentido estricto, sino que la variable independiente (en este caso, el enfoque de enseñanza predominante en cada grupo) es una característica no inducida por el investigador.

Contexto de investigación

Los grupos que participaron en la investigación forman parte de una muestra por conveniencia, seleccionada del Centro de Bachillerato Tecnológico, Industrial y de Servicios 10, de la ciudad de Guadalajara. Se trata de una escuela cuya población estudiantil en su totalidad está compuesta por mujeres, donde se ofrece una modalidad de formación bivalente (de preparación para la educación superior y de capacitación técnica para incorporarse al mercado laboral). La escuela se encuentra en una zona de clase media baja de la ciudad. Los profesores que tuvieron a su cargo la enseñanza de las diferentes asignaturas de Matemáticas en los dos grupos participantes en esta investigación, eran licenciados en Educación Media en el área de Matemáticas (conocida también como Normal Superior).

La muestra se ajustó a un número de 26 estudiantes, tanto para el grupo control como para el experimental. Las estudiantes del grupo de control estuvieron expuestas por dos años, con un mismo profesor, a un modelo de enseñanza centrado en el carácter instrumental del conocimiento matemático. Las prácticas predominantes en ese modelo eran la explicación del profesor y la ejercitación de las estudiantes en procedimientos, básicamente algebraicos y geométricos, donde los contenidos representan objetos matemáticos puros, con poca o nula referencia a contextos y situaciones que enriquecieran su significado. La finalidad de este modelo es el dominio de los símbolos y de sus normas de uso.

El grupo experimental (n=26) estuvo expuesto durante los mismos dos años, con un mismo profesor, a un modelo de enseñanza centrado en el carácter conceptual del conocimiento matemático. Las prácticas predominantes en este grupo fueron la discusión entre profesor y estudiantes en torno al significado de cada concepto, a través de la lectura de su definición y la asignación de significado a ejemplos asociados a ella. La finalidad de este modelo es la resignificación de los conceptos en una diversidad de situaciones, orientado en ideas como la sostenida por Dahl

Cuadro 1. Categorías de los niveles de recuperación y comunicación de las respuetas

Evocación de objeto matemático asociado	1. Sí	2. No
a: Señala propiedades esenciales del concepto	a_1	a_2
b: Señala propiedades secundarias	b_1	b_2
c: No señala propiedades	c_1	c_2

(2004), en el sentido de que el aprendizaje de conceptos matemáticos sólo puede ser elaborado por los estudiantes a partir de una colección de ejemplos pertinentes, los cuales remiten a otros conceptos que deben estar formados en su mente.

Hipótesis de trabajo

El nivel de recuperación de significado de conceptos matemáticos en el grupo expuesto al modelo de enseñanza de las matemáticas centrado en su carácter conceptual, es mayor que en el grupo expuesto al modelo centrado en su carácter instrumental.

Recopilación y análisis de datos

Se aplicó a las estudiantes de ambos grupos una prueba de respuesta abierta en la que se les solicitaba recordar y comunicar por escrito el significado de 20 conceptos matemáticos, agrupados en cuatro áreas, de acuerdo con el tipo de contenidos temáticos abordados en los programas de estudio, algunos de los cuales presentan una correspondencia o articulación vertical, es decir, se aprenden en un semestre y se emplean en otros progresivos:[2]

a) Aritmética.
b) Álgebra.
c) Geometría, Trigonometría y Geometría Analítica.
d) Cálculo diferencial.

Las preguntas comprendieron dos instrucciones: escribir el significado del concepto y dar un ejemplo del mismo, es decir, generar un objeto matemático que correspondiera al concepto (por ejemplo, definir el concepto "ecuación" y escribir una expresión que lo sea). Esta forma de señalar la demanda dio lugar a distintos niveles de recuperación y de comunicación de la respuesta de las estudiantes, de los cuales se desprenden seis categorías, mostradas en el Cuadro 1.

Los valores asignados a las categorías de respuesta fueron: 5 puntos a la categoría a_1, 4 puntos para la categoría a_2, 3 puntos para la categoría b_1, 2 puntos para la categoría b_2, 1 punto para la categoría c_1 y 0 puntos para la categoría c_2.

El análisis de los datos se desarrolló en dos fases, cuya lógica y resultados se describen enseguida:

Fase 1: Evaluación por áreas.

Esta fase comprende el cálculo del porcentaje de sujetos de la muestra que dieron respuestas consideradas correctas (categorías a_1 y a_2) a cada pregunta, según el área matemática contemplada. Para el análisis por grupos, se consideró una recuperación aceptable del significado del concepto, cuando ésta fue lograda por más del 20% de las estudiantes de cada grupo (en tal caso la celda que contiene los datos se encuentra sombreada en el Cuadro 2).

Cuadro 2. Porcentaje de recuperación de significado. Área: Aritmética

Grupo experimental

Ítem	1	7	20
%	7.7	34.6	0.0

Grupo control

Ítem	1	7	20
%	7.7	50.0	11.5

Los conceptos solicitados en el instrumento fueron, de acuerdo con el número de la pregunta, en esta área: (1) *razón*, (7) *promedio* y (20), *número primo* (ver Cuadro 3).

Cuadro 3. Porcentaje de recuperación de significado. Área: Álgebra

Grupo experimental

Ítem	2	3	8	9	10	11	13
%	34.6	46.1	73	30.7	11.5	19.2	65.3

Grupo control

Ítem	2	3	8	9	10	11	13
%	11.5	7.7	61.5	0.0	0.0	7.7	42.3.

Las preguntas en esta área refieren a los conceptos: (2) *Factorizar*, (3) *Ecuación*, (8) *Producto*, (9) *Factor*, (10) *Término algebraico*, (11) *Coeficiente*, (13) *Reducción de términos* (ver Cuadro 4).

Los conceptos solicitados por el instrumento, de acuerdo con el número de la pregunta, en esta área fueron: (6) *Función trigonométrica*, (14) *Perpendicular*, (15) *Pendiente*, (16) *Triángulo oblicuángulo*, (18) *Parábola*, (19) *Recta tangente* (ver Cuadro 5).

Los conceptos solicitados en esta área, fueron: (4) *Derivada de una función*, (5) *Función*, (12) *Variable*, (17) *Límite de una función*.

Cuadro 4. Porcentaje de recuperación de significado. Área: Geometría plana, Geometría analítica y Trigonometría

Grupo experimental

Ítem	6	14	15	16	18	19
%	3.8	34.6	57.7	19.2	19.2	19.2

Grupo control

Ítem	6	14	15	16	18	19
%	11.5	0.0	0.0	3.8	0.0	19.2

Cuadro 5. Porcentaje de recuperación de significado. Área: Cálculo diferencial

Grupo experimental

Ítem	4	5	12	17
%	30.7	23	57.6	19.2

Grupo control

Ítem	4	5	12	17
%	11.5	0.0	73.1	15.3

Un primer aspecto que se puede destacar, a partir de los resultados obtenidos, es que la exposición de las estudiantes a un modelo de enseñanza donde prevalece el trabajo de reflexión y discusión sobre los conceptos, permite que se apropien de su significado en mayor proporción que en los casos donde el conocimiento matemático es tratado solamente en su carácter instrumental. Como se aprecia en las figuras, considerando las cuatro áreas, el grupo experimental presenta un nivel aceptable de recuperación del significado en 11 de las preguntas mientras que el grupo control presenta este nivel sólo en 4 de ellas.

De manera particular, llaman la atención datos como el porcentaje de recuperación de significado en el grupo experimental sobre el concepto *pendiente de la recta*, el cual es introducido en la enseñanza de la Geometría Analítica (tercer semestre), de acuerdo con los programas de estudio escolares, cuya comprensión es clave para la construcción de conocimientos y la solución de problemas de variación en Cálculo Diferencial (cuarto semestre). Mientras que en el grupo experimental más de la mitad de las estudiantes recordó este concepto, en el grupo control ninguna de ellas lo hizo.

Sin embargo, algunos datos muestran que aun las estudiantes del grupo experimental tienden a expresar su comprensión de algunos de los conceptos que les fueron solicitados sólo en atención a su carácter procedimental, esto es, los refieren a la *tarea asociada*, pero sus definiciones no recuperan otras propiedades esenciales del concepto. Como ejemplo, una propiedad esencial del concepto "ecuación" es la de *establecer una igualdad entre dos expresiones*. No obstante, una estudiante de este grupo respondió lo siguiente:

> "Es cuando una fórmula se tiene que desbaratar para saber el valor de la incógnita, como $3x - 6 = 0$; $3x = 6$; $[x = 6/3]$".

Lo anterior pone de relieve la necesidad de distinguir que, si bien muchos de los conceptos matemáticos refieren efectivamente a un procedimiento (en la prueba, 13 de los 20 conceptos se reconocen con un componente procedimental), aun en estos casos, tienen otras propiedades fundamentales en las cuales se puede basar su aprendizaje. Como ejemplo de estas propiedades se encuentra la restricción asociada al concepto "reducción de términos", de que *sólo pueden reducirse los términos que tengan la misma parte literal, o términos semejantes* (propiedad que es aparentemente aprendida durante el estudio del Álgebra, en primer semestre, pero luego es olvidada por muchos estudiantes cuando tienen que realizar procedimientos algebraicos que la implican, en sucesivas asignaturas, como Geometría Analítica o Cálculo Diferencial).

Por otra parte, el hecho de que un alto número de preguntas tuviera una proporción de recuperación de significado aceptable en el grupo experimental, particularmente en las áreas de Álgebra (5 de 7 conceptos) y Cálculo (3 de 4), permite suponer que la orientación de la enseñanza hacia el tratamiento conceptual de los contenidos aporta dos recursos al aprendizaje de los estudiantes:

- Una base de significados que es posible almacenar y recordar cuando son requeridos. Este proceso, que en algunas teorías cognitivas del aprendizaje escolar es llamado "activación de esquemas" (Gagné, 1993), puede ser realizado por el estudiante, ya sea acudiendo directamente a su memoria, o mediante la consulta de apuntes que hace en el aula que representan información útil, porque es comprendida conceptualmente.
- Una forma de acercarse al conocimiento matemático es comprender el significado de los conceptos, de tal manera que los alumnos puedan explotar sus propiedades en la resolución de problemas y puedan formar redes conceptuales al interior de sus estructuras de conocimiento. Por ejemplo, la relación "pendiente de una recta-derivada de una función".

Fase 2: Valoración global

En este momento del análisis se utilizó una prueba de comparación de medias entre las estudiantes

del grupo experimental y del grupo control. Los resultados presentados enseguida conducen a aceptar la hipótesis de trabajo, en tanto el grupo experimental presentó diferencia significativa respecto al grupo control en el nivel de recuperación del significado de los conceptos que fueron preguntados en la prueba (ver Cuadro 6).

Discusión

La presencia de diferencia significativa en el nivel de recuperación de significado de conceptos matemáticos, que se desprende de los valores del estadístico de prueba, muestra que las estudiantes del grupo experimental, que trabajaron en una clase centrada en la discusión sobre las propiedades de los conceptos, alcanzaron a apropiarse de elementos de significado en un grado y forma distintos a las que fueron expuestas a una enseñanza instrumental.

Asimismo, estos resultados sugieren que tales estudiantes, sujetas a una enseñanza con énfasis en el tratamiento conceptual del conocimiento matemático, al comunicar significados por escrito, evidencian haber incorporado recursos de lenguaje útiles para la comprensión de los conceptos. De esta manera, queda corroborado lo que apunta, entre otros, Rodríguez-Mena (2007), en el sentido de que los estudiantes en entornos de enseñanza con estas características tienen muchas oportunidades para explicar lo que saben, para formular su comprensión de diferentes maneras y para responder a las preguntas de otros.

Sin embargo, estos resultados también muestran que, aunque un grupo escolar participe largo tiempo –en este caso, dos años– en una clase donde se insiste en que se apropie del significado de los conceptos como finalidad principal, el nivel en el que consigue esta apropiación es limitado. La media del grupo experimental se encuentra por debajo de la mitad del valor de la prueba, mientras que la del grupo control apenas supera una cuarta parte del valor de la prueba, lo que refleja una pobre apropiación del significado de conceptos que son parte de lo que los estudiantes cotidianamente estudian en el aula.

Una situación que explica en parte lo anterior, en el caso del contexto de investigación, es la sobrecarga de contenidos en los programas de estudio,[3] respecto de las posibilidades de enseñarlos a profundidad y asegurando la comprensión. Lo anterior obstaculiza en alguna medida la discusión de los conceptos en diferentes contextos, si la prioridad del profesor es "terminar el programa". Otra consecuencia de esto es que disminuyen las posibilidades de explotar la información contenida en las propiedades de los conceptos, tanto para resolver problemas matemáticos, como para explorar las situaciones que originan y dan sentido a los conceptos en distintos contextos, incluyendo la vida cotidiana de los estudiantes.

Por otra parte, prácticas correspondientes a lo que aquí se ha denominado modelo de enseñanza de las matemáticas centrado en su carácter instrumental, parecen ajustarse a una especie de cultura de trabajo presente entre los estudiantes en la cual el sentido de la actividad matemática en el aula es "hacer operaciones" y procedimientos, dejando de lado casi por completo la posibilidad de reflexionar en los conceptos y sus propiedades, tomando eso como base para construir razonamientos lógicos. La existencia de esta cultura limita en parte los resultados de una enseñanza orientada en el carácter conceptual del conocimiento matemático, pues aun en este tipo de entorno, la apropiación que los estudiantes pueden alcanzar de los conceptos sigue siendo baja.

Con respecto a esto último, la idea de que para los estudiantes *el análisis de las propiedades de los conceptos no representa una tarea clave durante el aprendizaje* es una opción para explicar los bajos niveles obtenidos por ambos grupos en el instrumento. Además, sugiere que la enseñanza de las matemáticas se realiza frecuentemente en entornos de actividad en los que, por lo general, el estudiante termina expuesto a una gran cantidad de información, llegando a manipular objetos matemáticos tales como símbolos, gráficas y otras representaciones *sin comprender suficientemente su significado*.

Cuadro 6. Resultados globales

Grupo	Media	Desviación estándar
Experimental	43.5	19.2
Control	25.7	14.1

Valor del estadístico de prueba $t = 3.81$; $p = 0.0004$.
Puntaje máximo de la prueba: 100.

Conclusiones

Los hallazgos obtenidos ponen de relieve cómo las acciones para construir el significado de los conceptos se encuentran determinadas por las prácticas de enseñanza. Si en éstas se privilegia la reflexión y discusión permanente sobre los significados de los conceptos matemáticos, en contextos y situaciones diversas, se ayuda a la comprensión en el estudiante, cuyos beneficios pueden quedar evidentes cuando tiene que resolver problemas matemáticos. Por otro lado, estos hallazgos sugieren la necesidad de impulsar una orientación para la enseñanza de las matemáticas dirigida a propósitos como los siguientes:

- Generar formas de mediación o ayuda pedagógica por las cuales los estudiantes en el aula puedan apropiarse de las propiedades esenciales de los conceptos matemáticos asociados a los objetos que manipulan, así como diversas formas de actividad por las cuales el significado de estos conceptos pueda ser comprendido y enriquecido.
- Crear una cultura de trabajo con los estudiantes en la que la actividad matemática inicie, se sostenga y concluya con la discusión y resignificación de los conceptos. Con ello, será posible aportar también algo al desarrollo del pensamiento conceptual, constituido por operaciones como la definición, abstracción e inferencia, tan importantes en todos los niveles educativos.

Referencias

APARICIO, J. y RODRÍGUEZ, M. (2000). "Los estudios sobre el cambio conceptual y las aportaciones de la psicología del aprendizaje". *Tarbiya*, No. 26, 13-30.

ARZARELLO, F., ROBUTTI, O. y BAZZINI, L. (2005). "Acting is learning: focus on the construction of mathematical concepts". *Cambridge Journal of* Education, Vol. 35, No. 1, 55-67.

AUSUBEL, D. (2000). *Adquisición y retención del conocimiento*. Barcelona: Paidós.

CHEVALLARD, Y. (1996). *La transposición didáctica*. Barcelona: Aique.

DAHL, B. (2004). "Analysing Cognitive Learning Processes Through Group Interviews of Successful High School Pupils: Development and Use of a Model". *Educational Studies in Mathematics*, No. 56**:** 129-155.

DUBINSKY, E. (1994). "A Theory and Practice of Learning College Mathematics", en SCHOENFELD, (ed.) *Mathematical Thinking and Problem Solving*. Hillsdale: Erlbaum, 221-243.

DUVAL, R. (1999). "Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning". *Memorias del Congreso Internacional de Psicología de la Educación Matemática*, Cuernavaca.

EGGEN, P. y KAUCHAK, D. (1998). *Estrategias docentes*. México: Fondo de Cultura Económica.

GAGNÉ, E. (1993). *Psicología cognitiva del aprendizaje escolar*. Madrid: Visor.

GODINO, J., y RECIO, A. (1998). "Un modelo semiótico para el análisis de las relaciones entre pensamiento, lenguaje y contexto en educación matemática" en OLIVIER, A. y NEWTEAD, K. (eds.). *Proceedings of the 22th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, v. 3, University of Stellenbosch, South Africa, 1-8.

GÓMEZ, I. (1998). *Matemáticas y contexto*. Madrid: Narcea.

KOTSOPOULOS, D. (2007). Unravelling Students Challenges with Quadratics: A Cognitive Approach. AMT, 63(2), 19-24.

MULLIGAN, J. y MITCHELMORE, M. (2009). Awareness of Pattern and Structure in Early Mathematical Development. *Mathematics Education Research Journal*, Vol. 21, No. 2, 33-49.

OCDE (2000). *Knowledge and skills for life. First results from the Programme for International Student Assessment* (PISA). París.

RODRÍGUEZ-MENA, M., (2007). "El aula como comunidad para aprender". *Cultura y Educación*, 19(1), 17-29.

SÁNCHEZ, J. y FERNÁNDEZ, J. (2003). *La enseñanza de las matemáticas*. Madrid: CSS.

SANTOS, L.M., (1996). "La importancia de la transferencia del conocimiento en el estudio situado de las matemáticas", en HITT, F. (coord.), *Investigaciones en Matemática Educativa*. México: Grupo Editorial Iberoamérica, 405-416.

TATE, W. (2006). "Do the Math: Cognitive Demand Makes a Difference?". *Research Points*, Vol. 4, iss. 2, 1-4.

Notas

1. Estos dos niveles son tomados en cuenta en el instrumento empleado en esta investigación, dado que se solicita al estudiante que defina de manera explícita y referencial (asociando un concepto a ejemplos) el significado de los conceptos.
2. Por ejemplo, el concepto "perpendicular", el cual es abordado inicialmente en el programa de Geometría Plana en el segundo semestre, posteriormente es requerido para el estudio de la Geometría Analítica en el tercer semestre, según la organización de los planes y programas de este bachillerato.
3. En general, los programas de las asignaturas referidas contienen una cantidad de contenidos desproporcionados en razón del tiempo que requiere su enseñanza y aprendizaje.